环 境 遥 感
第7卷 第4期 REMOTE SENSING OF ENVIRONMENT Vol. 7, No. 4
1992年11月 CHINA Nov., 1992

# 2DRE 四叉树的集合运算算法

萧 柯
(中国科学院遥感应用研究所)

1990年7月1日收稿

**摘 要**

本文提出并分析了一系列四叉树的集合运算算法。通过引入集合论，将时空复杂度较高的图像转换为简单的算术运算来进行，从而使问题的解决大大简化。文中介绍了算法的基础，详细阐述了诸算法，并对其进行了评价和分析，进而引伸到数据结构及算法的研究在应用领域中的作用和意义。

**关键词** 集合 图像处理 数据结构 四叉树 算法 遥感 地理信息系统

随着计算机在遥感图像处理方面应用的不断发展，数据结构与算法问题得到了人们越来越多的重视。人们在实践中认识到，如果能够对于某种特定的问题选取一种适当的数据结构，有时可能会使问题的解决大大简化。四叉树这种结构正是由于其本身的特点，在某些应用方面，诸如数据压缩，图像处理以及地理信息系统等，能够满足上述要求，所以近年来在人们的重视下和研究中得到了迅速的发展[1-4]。这种结构除了具有清晰、紧凑的优点之外，还适于进行某些基本的处理运算，在图像处理的研究中引入四叉树及其变换算法，通过集合论，用简单的算术运算来代替时空复杂度较高的图像运算，就能使问题的解决得以简化。

## 一、算法基础

将一幅图像的2DRE四叉树看作一个集合，则其元素就是编码连续的区域[4]。由此，可将集合运算引入这一领域。两幅图像的交、并、差，可以用其各自的四叉树之间的相应运算来实现。而这几种集合运算，实际上又是一些更复杂的处理方法的基本步骤。

给定两棵线性四叉树A和B，我们就有相应的两个集合A和B，而 $A\cap B$、$A\cup B$、$A-B$ 和 $B-A$ 仍是同种性质的集合，亦即这些集合运算的结果仍是线性四叉树。根据集合论可知，交和并是其中两种最基本的运算。但对于差运算，还可以分解成更简单的运算的组合。根据集合运算的公式，我们有：

$$A-B=A-(A\cap B)=A\cap(1-B)=A\cap\bar{B}, \tag{1}$$

同理：

$$B-A=B-(A\cap B)=B\cap(1-A)=B\cap\bar{A} \tag{2}$$

于是，两个集合的差集，可由一个集合的补集与另一集合进行交运算而求得。即集合的基本运算除了交、并之外，还有“求补”。

给定一个代表图像 $P_A$ 的2DRE四叉树的集合 A，设其中的编码连续区域有 $I_A$ 个，于是可记作：

$$A=\{A_1, A_2, \cdots, A_{I_A}\}$$

其中 $A_i(i=1, 2, \cdots, I_A)$ 是编码连续区域，亦即A的子集，i 则是区域的编号。由2DRE四叉树的性质，可知集合A中的元素 $A_i$ 是有序的，且 $A_i$ 本身又是由一系列编码值构成的有序集。不难看出，求两个集合A和B的交集或者并集，实际上是求它们各自的子集之间的交集或并集。求补的问题则较为简单。

设：
$$A=\{A_1, A_2, \cdots, A_{I_A}\} \tag{3}$$
$$B=\{B_1, B_2, \cdots, B_{I_B}\} \tag{4}$$

则：
$$A\cap B=\{A_1\cap B_1, A_1\cap B_2, \cdots, A_1\cap B_{I_B}, A_2\cap B_1, \cdots, A_2\cap B_{I_B}, \cdots, A_{I_A}\cap B_1, \cdots, A_{I_A}\cap B_{I_B}\} \tag{5}$$
$$A\cup B=\{A_1\cup B_1, A_1\cup B_2, \cdots, A_1\cup B_{I_B}, A_2\cup B_1, \cdots, A_2\cup B_{I_B}, \cdots, A_{I_A}\cup B_1, \cdots, A_{I_A}\cup B_{I_B}\} \tag{6}$$

看起来这两种运算似乎比较复杂。但是，由于这种集合的元素是有序的，又考虑到2DRE四叉树的性质和记录方式[4]，问题就可以大大简化了。(3)和(4)式所示的二集合A和B，其中的元素 $A_i$ 和 $B_j$ 各自都是由一系列连续的整数(即编码值)构成的另一类集合。$A_i$ 和 $B_j$ 中的元素可由它们的两个属性值来代表：$A_{i,1}$ 和 $B_{j,1}$ 分别代表它们的区域中的首编码；$A_{i,2}$ 和 $B_{j,2}$ 则分别代表它们的区域中的编码数目(即值点数目)，这样，我们就有另一种形式的集合A和B：

$$A=\{(A_{1,1}, A_{1,2}), (A_{2,1}, A_{2,2}), \cdots, (A_{I_A,1}, A_{I_A,2})\} \tag{7}$$
$$B=\{(B_{1,1}, B_{1,2}), (B_{2,1}, B_{2,2}), \cdots, (B_{I_B,1}, B_{I_B,2})\} \tag{8}$$

从而也就可以很容易地把这类集合运算转化为算术运算来进行。以下各节将以图

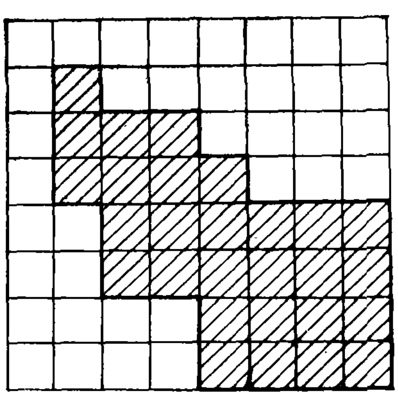

图 1　图像 A

Fig. 1　Image A

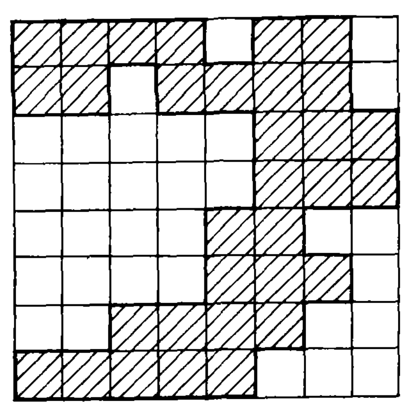

图 2　图像 B

Fig. 2　Image B

**表 1　图像 A 的 2DRE 四叉树集合**

**Table 1　2DRE Set of Image A**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 11 | 26 | 36 | 48 |
| 1 | 1 | 5 | 1 | 4 | 16 |

**表 2　图像 B 的 2DRE 四叉树集合**

**Table 2　2DRE Set of Image B**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 17 | 22 | 25 | 27 | 42 | 54 | 56 |
| 6 | 1 | 4 | 1 | 1 | 5 | 10 | 1 | 3 |

1，图 2，表 1，表 2 中所示的图像及其四叉树集合为例，讨论二集合的交、并、差以及一集合的求补运算。

## 二、求交集运算

给定二集合 A 和 B 及 $I_A$ 和 $I_B$，欲求 $C = A \cap B$，则有以下步骤：

1. 给定 A 和 B 分别如(7)、(8)式所示，读入二集合的数据。

2. 置 $I = 1$，$I_x = 1$，$I_C = 1$。

3. 判别 $A_{I,1}$ 与 $B_{I_x,1}$ 的关系。若"小于"则转向第 4 步；"等于"则转向第 6 步；"大于"则转向第 8 步。

4. 判别是否 $A_{I,1} + A_{I,2} \leqslant B_{I_x,1}$. 是则转向第 13 步；否则 $C_{I_C,1} \leftarrow B_{I_x,1}$，$C_{I_C,2} \leftarrow A_{I,1} + A_{I,2} - C_{I_C,1}$。

5. 判别是否 $C_{I_C,2} \leqslant B_{I_x,2}$. 是则 $I_C \leftarrow I_C + 1$，然后转向第 13 步；否则 $C_{I_C,2} \leftarrow B_{I_x,2}$，再转向第 10 步。

6. $C_{I_C,1} \leftarrow A_{I,1}$，$C_{I_C,2} \leftarrow A_{I,2}$。

7. 判别是否 $A_{I,2} \leqslant B_{I_x,2}$. 是则 $I_C \leftarrow I_C + 1$，再转向第 13 步；否则 $C_{I_C,2} \leftarrow B_{I_x,2}$，再转第 10 步。

8 判别是否 $B_{I_x,1} + B_{I_x,2} > A_{I,1}$. 是则 $C_{I_C,1} \leftarrow A_{I,1}$。$C_{I_C,2} \leftarrow B_{I_x,1} + B_{I_x,2} - C_{I_C,1}$；否则转第 11 步。

9. 判别是否 $C_{I_C,2} \leqslant A_{I,2}$。 是则转向第 10 步；否则转第 12 步。

10. $I_C \leftarrow I_C + 1$。

11. $I_x \leftarrow I_x + 1$。再判别是否 $I_x \leqslant I_B$。是则返回第 3 步；否则 $I_C \leftarrow I_C - 1$，结束运算，C 为所求之集合，$I_C$ 为其中的区域数目。

12. $C_{I_C,2} \leftarrow A_{I,2}$，$I_C \leftarrow I_C + 1$。

13. 判别是否 $I < I_A$。是则 $I \leftarrow I + 1$。返回第 3 步；否则 $I_C \leftarrow I_C - 1$，结束运算，

**表 3　集合运算 A∩B 的结果 2DRE 四叉树**

**Table 3　The Result 2DRE Quadtree of Set Operation of A∩B**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 48 | 54 | 56 |
| 1 | 4 | 1 | 3 |

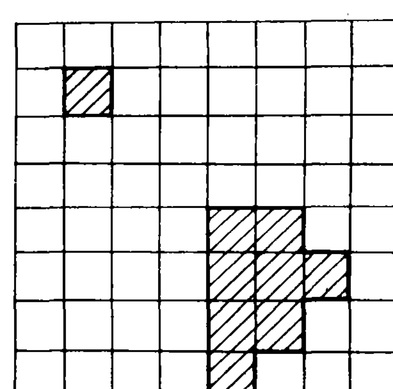

图 3　A∩B 的图像

Fig. 3　Image of A∩B

得到C及$I_C$。

图 3 和表 3 分别是对图 1、图 2 所示的图像进行集合交运算的结果四叉树和结果图像，这二原始图像的集合A和B分别由表 1 和表 2 所示。

## 三、求并集运算

给定二集合分别如(7)，(8)式所示。其构成原则、集合内容均同上。于是，求二集合之并集的运算亦可化为算术运算来进行。

并运算的步骤如下：

1. 给定二集合A和B及$I_A$和$I_B$。读入二集合的数据。

2. 构造一新集合 $C=\{(C_{1,1},C_{1,2}),\cdots,(C_{I_C,1},C_{I_C,2})\}$，其中元素均为A和B中的元素。且有 $C_{1,1}\leqslant C_{2,1}\leqslant\cdots\leqslant C_{I_C,1}$、又 $I_C=I_A+I_B$。

3. 置 $M_0=1$，$M_K=1$，$K_t=I_C-1$。

4. 置 $K_m=M_K-M_0+1$。

5. 判别是否 $C_{K_m,1}+C_{K_m,2}<C_{K_m+1,1}$. 是则，$M_K\leftarrow M_K+1$，再转第 4 步；否则往下进行。

6. 判别是否 $C_{K_m,1}=C_{K_m+1,1}$. 是则转第 7 步；否则转第 8 步。

7. 判别是否 $C_{K_m+1,2}>C_{K_m,2}$. 是则 $C_{K_m,2}\leftarrow C_{K_m+1,2}$. 再转第 9 步；否则直接转第 9 步。

8. $C_{K_m,2}\leftarrow C_{K_m+1,1}+C_{K_m+1,2}-C_{K_m,2}$。

9. 判别是否 $M_K<K_t$. 是则删去$(C_{K_m+1,1},C_{K_m+1,2})$并将其后面各元素的标号减1，然后 $I_C\leftarrow I_C-1$，$M_0\leftarrow M_0+1$，转第 4 步；否则往下进行。

10. $I_C\leftarrow I_C-1$. 结束运算，得到最后的集合 $C=A\cup B$，$I_C$是C中元素的数目。

图 4 和表 4 是用以上方法对图 1 和图 2 所示的二图像求并集的结果。这二原始图像的集合A和B分别如表 1 和表 2 所示。

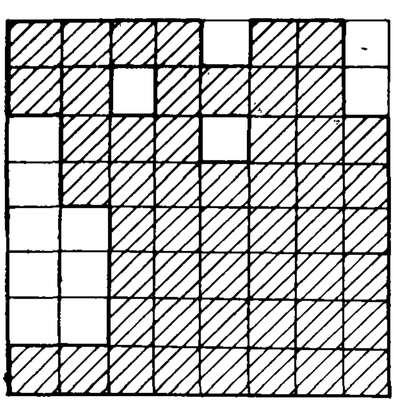

图 4 A∪B的图像

Fig. 4 Image of A∪B

表 4 集合运算 A∪B 的结果 2DRE 四叉树

Table 4 The Result 2DRE Quadtree of Set Operation of A∪B

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 9 | 11 | 17 | 22 | 25 | 36 | 42 |
| 6 | 1 | 1 | 5 | 4 | 1 | 7 | 4 | 22 |

# 四、求补集及求差集运算

设给定一集合 A 如(7)式所示，其构成原则亦同上，则求其补集 $C=\bar{A}$ 的步骤如下：

1. 给定集合 A 和 $I_A$，读入数据。

2. 置 $I_C=1$。

3. 判别是否 $A_{1,1}>0$。是则 $C_{1,1}\leftarrow 0$，$C_{1,2}\leftarrow A_{1,1}$，$I_C\leftarrow I_C+1$，再转第 4 步；否则直接转第 4 步。

4. 置 $I_{A'}=I_A-1$，$I=1$。

5. $C_{I_C,1}\leftarrow A_{I,1}+A_{I,2}$；$C_{I_C,2}\leftarrow A_{I+1,1}-C_{I_C,1}$；$I_C\leftarrow I_C+1$。

6. $I\leftarrow I+1$，再判别是否 $I<I_{A'}$，是则转第 5 步；否则往下进行。

7. 判别是否 $A_{I_A,1}+A_{I_A,2}<2^{2n}$，是则 $C_{I_C,1}\leftarrow A_{I_A,1}+A_{I_A,2}$；$C_{I_C,2}\leftarrow 2^{2n}-C_{I_C,1}$；否则 $I_C\leftarrow I_C-1$。

8. 结束运算，C 为所求之 $\bar{A}$，$I_C$ 为 $\bar{A}$ 中的元素数目。

注：设图像为 $2^n\times 2^n$ 大小。

表 5 给出了对图 1 所示的图像、集合作求补运算的结果；表 6 则是对图 2 进行求补运算的结果。

至于求二集合的差集，可利用(1)或(2)式，先求补，再求交，即得所求。

表 7 是图像 A 或图像 B 的差集；表 8 则是图像 B 减图像 A 的差集。二差集的图分别

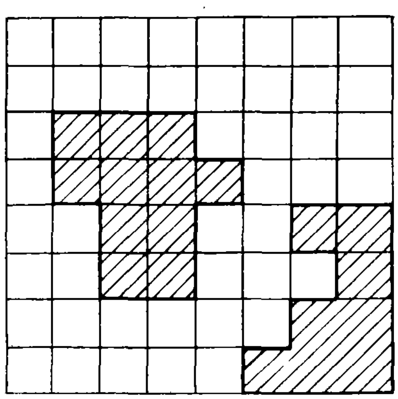

图 5　A－B 的图像

Fig. 5　Image of A－B

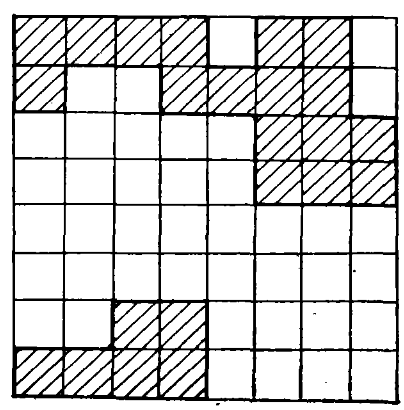

图 6　B－A 的图像

Fig. 6　Image of B－A

**表 5　集合运算 $\bar{A}$ 的结果 2DRE 四叉树**

**Table 5　The Result 2DRE Quadtree of Set Operation $\bar{A}$**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 10 | 16 | 27 | 40 |
| 3 | 5 | 1 | 10 | 9 | 8 |

**表 6　集合运算 B 的结果 2DRE 四叉树**

**Table 6　The Result 2DRE Quadtree of Set Operation $\bar{B}$**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 21 | 23 | 26 | 32 | 52 | 55 | 59 |
| 1 | 9 | 1 | 2 | 1 | 10 | 2 | 1 | 5 |

表7 集合运算 A－B 的结果 2DRE 四叉树
Table 7 The Result 2DRE Quadtree of Set Operation of A － B

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 11 | 26 | 36 | 52 | 55 | 59 |
| 1 | 5 | 1 | 4 | 2 | 1 | 5 |

表8 集合运算 B － A 的结果 2DRE 四叉树
Table 8 The Result 2DRE Quadtree of Set Operation of B － A

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 7 | 17 | 22 | 25 | 27 | 42 |
| 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 5 | 6 |

是图 5 和图 6，图像 A 及其集合表示如图 1、表1；图像 B 及其集合表示如图 2、表2。

## 五、算法的评价与分析

四叉树的集合运算算法具有若干特点：

第一、过程简洁。由于引入了集合论，就把复杂的图像间的交、并、差等运算转化为简单的算术运算来进行，从而大大地简化了对图像进行相应处理所需的将图像中所有像元一一判别、运算的繁琐过程。

第二、节省时空。由于本系列各算法均是只对图像的 2DRE 四叉树集合进行运算，故所需空间仅是相应四叉树所占的空间及少量工作单元，而不需要将整幅图像输入系统所占用的庞大空间。即使是对于图像是逐行输入进行交、并、差运算的情形（同样可以避免占用过大空间以至于“溢出”的矛盾），本系列算法的优点也是十分明显的。因为图像运算逐行输入、输出系统，需要大量的 I/O 时间，而集合运算可将相应集合一次装入系统，时间的节省显而易见；又由于集合运算是对图像中的编码连续区进行操作，从而不需要图像运算时逐一比较、处理图像像元所需的冗长的计算时间。在实际应用中，这一特点尤其明显。

本文是通过对二值图像的处理来描述本系列算法的。事实上，对于两图像间的运算，可将相应的算法引伸到“同值”的情形。在实际应用中，我们是先采用 Raster—2DRE Quadtree 变换算法[4]得到不同灰度值的四叉树，再对同灰度值的四叉树应用本系列算法的。当然，也可以根据需要，在不同灰度值的四叉树之间应用本算法，这就使图像的集合运算具有了较大的灵活性。

通过对本系列算法的研究，可以更清楚地看到四叉树，特别是 2DRE 四叉树这一数据结构的意义：它不仅仅提供了一种压缩存储空间的手段，而且其本身也是一种相当有效的结构。由于在图像的交、并、差运算中采用了这一结构，又引入了集合论，就将复杂的图像运算转化为简单的算术运算来进行，从而使问题的解决大大地简化了。由此进一步显示了数据结构与算法的研究在图像处理的应用领域的作用和意义。

另一方面还应指出的是，四叉树仅仅是一种数据结构，尽管它具有上述优点，也不可能在任意场合都适用。例如，在图像的输入、输出时，应采用直观的、逐行操作的栅格结构；在描述区域边界时，采用向量结构是最为方便等等。在一个完善的图像处理系统或地理信息系统中，应具有不同的数据结构形式及它们之间的灵活的转换机制，才能满足不同的要求，使系统更加有效。

## 参　考　文　献

[1] A. Klinger & C. R. Dyer, Experiments on Picture Representation Using Regular Decomposition, Computer Graphics and Image Processing, Vol. 5, 1976.

[2] I. Gargantini, An Effective Way to Represent Quadtrees, Commu. ACM, 25(12), 1982.

[3] J. P. Lauzon, et al., Two-Dimensional Run-Encoding for Quadtree Representation, Computer Vision Graphics and Image Processing, Vol. 30, 1985.

[4] 萧柯，遥感图像栅格——2DRE 四叉树结构变换算法，《环境遥感》，6(4)，1991.

# THE SET OPERATION ALGORITHMS OF 2DRE QUADTREES

Xiao Ke

*(Institute of Remote Sensing Application Chinese Academy of Sciences)*

## Abstract

This paper advances and analyzes a series of algorithms for set operations of 2DRE Quadtrees, which changes complicated image operations with high complexity of time and space into a simple arithmatic operations to simplify the solution of some issues through set theory. In this paper, the foundations of the algorithms are introduced first; then the algorithms are described and analyzed in detail; finally, the meaning of the research of data structure and algorithms in application are discussed.

**Key words** Set Image Processing Dat Structure Quadtree Algorithm Remote Sensing Geographic Information System